О ЗАДАЧАХ ВОССТАНОВЛЕНИЯ

Н.Темиргалиев

Евразийский Национальный Университет
им. Л.Н.Гумилева
Институт теоретической математики и научных
вычислений

Оппург, Германия
12.10.2010 г.

I. Компьютерный (вычислительный) поперечник

II. О предельной погрешности неточной информации при оптимальном восстановлении функций

III. К вопросу об определении “внутренних свойств” сетки для эффективного восстановления

Публикации по темам доклада

1. Ш.Ажгалиев, Н.Темиргалиев Об информативной мощности линейных функционалов //Матем. заметки, т.3, є.6, 2003, стр. 803-812.
Sh.Azhgaliev, N.Temirgaliyev Informativeness of Linear Functionals //Mathematical Notes, Vol. 73, No 6, 2003, pp. 759-768.

2. Е.А.Баилов, Н.Темиргалиев О дискретизации решений уравнения Пуассона //Журнал вычислительной математики и математической физики,т. 46, є9, 2006, стр. 1594-1604.
Y.Bailov, N.Temirgaliyev Discretization of the solutions to Poisson's equation //Computational mathematics and mathematical physics, Vol. 46, No. 9, 2006, pp. 1515-1525.

3. Ш.Ажгалиев, Н.Темиргалиев Информативная мощность всех линейных функционалов при восстановлении функций из классов H_p^ω //Матем. сб., т. 198, є11. 2007, стр. 3-20.
Sh.Azhgaliev, N.Temirgaliyev Informativeness of all the Linear Functionals in the recovery of functions in the classes //Mathematical sb., 2007, pp.1535-1551.

4. Н.Темиргалиев, Е.А.Баилов, А.Ж. Жубанышева Об общем алгоритме численного интегрирования периодических функций многих переменных //Докл. РАН, 2007, т. 416, є2, стр. 169-173.
N.Temirgaliyev, Y.Bailov, A.Zh.Zhubanisheva General algorithm for the numerical integration of Periodic function of several variables //Dockland Mathematics, 2007, pp. 681-685.

5. И.Ж. Ибатулин, Н.Темиргалиев Об информативной мощности всех возможных линейных функционалов при дискретизации решений уравнения Клейна-Гордона в метрике $L^{2,\infty}$//Дифференциальные уравнения, т. 44, є 4, 2008, стр. 491-506.
I.Ibatullin, N.Temirgaliyev On the informative power of all possible linear functionals for the discretithation of the solutions of the Klein-Gordon equation in the metric of L2, //Differential equation, vol.44, No.4, 2008, pp. 510-526.

6. А.Ж.Жубанышева, Н.Темиргалиев, Ж.Н.Темиргалиева Применение теории дивизоров к построению таблиц оптимальных коэффициентов квадратурных формул //Журнал вычислительной математики и математической физики, 2009, т.49, є1, стр. 14-25.
A.Zh.Zhubanisheva, N.Temirgaliev, Zh.N., Temirgalieva Application of divisor theory to the construction of tables of optimal coefficients for quadrature formulas //Computational mathematics and mathematical physics, 2009, Vol. 49, No1, pp. 12-22.

7. Н.Темиргалиев, С.С.Кудайбергенов, А.А.Шоманова Применение тензорных произведений функционалов в задачах численного интегрирования //Изв. РАН, сер. матем., 2009, т. 73, є2, стр. 183-224.
An application of tensor products of functionals in problems of numerical integration //Izvestiya: Mathematics, 2009, Vol. 73, No 2, pp. 393-434).

8. Н.Ж.Наурызбаев, Н.Темиргалиев О порядке дискрепанса сетки Смоляка //Матем. заметки, 2009, т. 85, є 6, 947-950. N.Zh.Naurizbaev, N.Temirgaliev On the Order of Discrepancy of the Smolyak Grid //Mathematical Notes, 2009, Vol. 85, No 6, pp. 897-901.

9. Н.Темиргалиев Тензорные произведения функционалов и их применения // Докл.РАН, 2010, том 430, є 4, с. 460-465. N.Temirgaliev Tensor Products of Functionals and Their Application // Docklandy Mathematics, 2010, Vol. 81, No.1, pp. 78-82.

10. Н.Темиргалиев, С.С.Кудайбергенов, А.А.Шоманова Применения квадратурных формул Смоляка к численному интегрированию коэффициентов Фурье и в задачах восстановления // Изв. ВУЗов. Математика. 2010, є3. С.52-71.
"Applications of Smolyak quadrature formulas to the numerical integration of Fourier coefficients and in function recovery problems", Russian Mathematics (Iz VUZ) 54:3 (2010), 45-62.

11. Ш.К. Абикенова, Н.Темиргалиев О точном порядке информативной мощности всех возможных линейных функционалов при дискретизации решений волнового уравнения // Дифф. уравн., т. 46, є 8, 2010, стр. 1201-1204.

12. М. Сихов, Н.Темиргалиев Об алгоритме построения равномерно распределенных сеток Коробова // Матем. замет., 2010, том 87, є6 стр.948-950.

13. Темиргалиев Н. Теоретико-числовые методы и теоретико-вероятностный подход к задачам Анализа. Теория вложений и приближений, абсолютная сходимость и преобразования рядов Фурье //Вестн. ЕАУ, 1997, є 3. С. 90-144

14. Темиргалиев Н. Компьютерный (вычислительный) поперечник. Алгебраическая теория чисел и гармонический анализ в задачах восстановления (метод Квази-Монте Карло). Теория вложений и приближений. Ряды Фурье // Вестн.ЕНУ им. Л.Н.Гумилева, 2010. Спец. выпуск, посвященный научным достижениям математиков ЕНУ им. Л.Н.Гумилева, стр. 1 - 194.

15. Темиргалиев Н. "Математика: Избранное. Наука"/под ред. Б. С. Кашина. - Астана: Изд-во ЕНУ им. Л.Н. Гумилева, 2009, 613 с.

I. Компьютерный (вычислительный) поперечник По определению

$$\delta\left(D_N; T; F\right)_Y \equiv \inf_{\left(l_1,...,l_N;\varphi_N\right)\in D_N} \sup_{f\in F} \left\|\left(Tf\right)(\cdot) - \varphi_N\left(l_1\left(f\right), ..., l_N\left(f\right); \cdot\right)\right\|_Y, \tag{1}$$

где $D_N \subset \{(l_1, ..., l_N; \varphi_N)\}$.

Примеры функционалов $l\,(f)$:

1^0. $l\,(f) = f\,(\xi)$ - значения f функции в точке ξ;

2^0. $l\,(f) = \langle f, g\rangle \equiv \int\limits_{\Omega} f\,(x)\,\bar{g}\,(x)\,d\mu\,(x)$ -скалярное произведение, в частности, коэффициенты Фурье по той или иной ортогональной и нормированной системе (ОНС); Через $\Phi^{(N)}$ будем обозначать функционалы вида $l_k(f) = \left\langle f, e^{2\pi i(m^{(k)},x)}\right\rangle$ $(k = 1, ..., N)$.

3^0. $l\,(f)$ - все возможные линейные функционалы, определенные на линейной оболочке множества F(если не оговорено противное, то всюду ниже через $L^{(N)}$ будем обозначать множество всех наборов $(l_1\,(f)\,, ..., l_N\,(f))$ функционалов означенного здесь типа);

4^0. $l\,(f)$ - какие-то функционалы, не обязательно линейные, но не все.

Примеры операторов *Tf:*

$1^o \quad Tf = \int\limits_{\Omega} f(x)\,dx$ — численное интегрирование;

$2^o \quad Tf = f$ — восстановление функции;

$3^o \quad Tf = u(y, f)$ — дискретизация решений уравнений в частных производных:

$\Delta u = 0,\ y = x$ – уравнение Лапласа,

$\Delta u = f,\ y = x$ – уравнение Пуассона,

$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u,\ y = (t, x)$ – уравнение теплопроводности,

$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u,\ y = (t, x)$ – волновое уравнение,

$Lu = 0$, где L – дифференциальный оператор.

Как оказалось, исследование Компьютерного (вычислительного) поперечника вовлекает в свою теорию много различных математических идей и результатов из разных областей математики в их взаимосвязи.
Так, на этом пути установлены связи между совершенно различными теориями-между **численным анализом** и **теорией вложений** (Ш. Ажгалиев, Н. Темиргалиев [3])

$$\delta_N\left(L^{(N)}\times\varphi_N; H_p^\omega\right)_{L^q} \succ\prec \left(\sum_{n=N+1}^{\infty} n^{\frac{q}{p}-2}\omega^q\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{\frac{1}{q}} \Leftrightarrow H_p^\omega \subset L^q$$

$(1\le p<q<\infty)$.

Проследим на этом примере всю эффективность определения (1).

Изучается задача восстановления функций $f \in L^p(0, 1)$. Пространства H_p^ω образуют достаточно тонкую шкалу классификации функций из $L^p(0, 1)$.

Здесь дается окончательный ответ на поставленную задачу именно благодаря определению (1): какой бы вычислительный агрегат $\varphi_N(l_1(f), ..., l_N(f); x)$ ни привлекать, в их числе все, что сделано в теории приближений и вычислительной математике, включая все ряды Фурье, базисы, интерполяционные многочлены, всплески, поперечники Фурье и т.п., лучше указанной скорости не приблизить. Причем в качестве оптимального агрегата приближения достаточно взять отрезки рядов Фурье–Хаара, что перекликается с теорией всплесков.

Такой вывод сделан благодаря тому, что в (1) содержатся все линейные методы приближений, поперечники, определяемые посредством линейных функционалов (нелинейные приближения типа гриди - алгоритмов тоже).

Приведем ещё один пример. Изучается задача дискретизации периодических решений задачи Коши для волнового уравнения $(s = 1, 2, \ldots)$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + ... + \frac{\partial^2 u}{\partial x_s^2} \qquad (2)$$

$(u = u\,(x,t)\,,\ 0 \le t \le 1,\ x \equiv (x_1, \ldots, x_s) \in R^s)\,,$ с начальными условиями

$$u(x,0) = f_1(x) \in F^{(1)}, \quad \frac{\partial u}{\partial t}\,(x,0) = f_2\,(x) \in F^{(2)} \quad (x \in R^s)\,. \qquad (3)$$

Определение. Класс $W_2^{\omega_{r_1},\dots,\omega_{r_s}}(0,1)^s$ есть, по определению, множество всех суммируемых 1-периодических по каждой переменной функций $g(x) = g(x_1,\dots,x_s)$, тригонометрические коэффициенты Фурье-Лебега $\widehat{g}(m)$ которых удовлетворяют условию

$$\sum_{m=(m_1,\dots,m_s)\in Z^s} |\widehat{g}(m)|^2 \cdot \left(\omega_{r_1}^{-2}\left(\frac{1}{\overline{m_1}}\right) + \dots + \omega_{r_s}^{-2}\left(\frac{1}{\overline{m_s}}\right)\right) \leq 1,$$

где $\overline{m_j} = \max\{1, \left|m_j\right|\}, j = 1,..,s.$

В частности, при $\omega_{r_j}(\delta) = \delta^{r_j}$ классы $W_2^{\delta^{r_1},\dots,\delta^{r_s}}(0,1)^s$ сводятся к обычным анизотропным классам Соболева $W_2^{r_1,\dots,r_s}(0,1)^s$.

Через g^* обозначим обратную к инъективной функции g :

$$\tau(x) \equiv \left(\prod_{j=1}^{s} \omega_{r_j}^*\right)^*(x), \ \tau(x) = x^{\frac{1}{\frac{1}{r_1}+\dots+\frac{1}{r_s}}}.$$

Теорема 1(Ш. Абикенова, А. Утесов, Н. Темиргалиев). *(информативная мощность всех возможных линейных функционалов). Пусть* $\{\omega_{r_1},...,\omega_{r_s}\}$ *и* ω_ν *- система и отдельная функция типа модуля гладкости порядков* $r_1,...,r_s$ *и* ν *соответственно, удовлетворяющие условиям*

$$\sum_{m\in Z^s}\frac{\left(\overline{m_1}^2+...+\overline{m_s}^2\right)^2}{\omega_{r_1}^{-2}\left(\frac{1}{\overline{\overline{m_1}}}\right)+...+\omega_{r_s}^{-2}\left(\frac{1}{\overline{\overline{m_s}}}\right)}<\infty,\ \sum_{m\in Z^s}\frac{\overline{m_1}^2+...+\overline{m_s}^2}{\omega_{\nu}^{-2}\left(\frac{1}{\overline{\overline{m_1}}}\right)+...+\omega_{\nu}^{-2}\left(\frac{1}{\overline{\overline{m_s}}}\right)}<\infty,$$

и такие, что $\omega_\alpha(\eta\cdot\xi)\le C(\omega_\alpha)\cdot\omega_\alpha(\eta)\cdot\omega_\alpha(\xi)$, *при некотором положительном* $C(\omega_\alpha)$ *и для всех* $0<\xi,\ \eta\le 1$, $(\alpha=r_1,\dots,r_s,\ \nu)$.

Тогда при $F^{(1)}=W_2^{\omega_{r_1},\dots,\omega_{r_s}}(0,1)^s$ *и* $F^{(2)}=W_2^{\omega_\nu,\dots,\omega_\nu}(0,1)^s$ *имеет место соотношение* $(N=2,3,...)$

$$\min_{\substack{N_1+N_2=N,\\ N_1\ge 1,N_2\ge 1}}\ \inf_{\substack{l_1^{(1)},...,l_1^{(N_1)},\\ l_2^{(1)},...,l_2^{(N_2)}-\text{линейные}\\ \text{функционалы},\varphi_N}}\ \sup_{\substack{f_1\in W_2^{\omega_{r_1},...,\omega_{r_s}}(0,1)^s\\ f_2\in W_2^{\omega_\nu,...,\omega_\nu}(0,1)^s}}\left\|u(\cdot;f_1,f_2)-\varphi_N\left(l_1^{(1)}(f_1),\dots,l_1^{(N_1)}(f_1),\ l_2^{(1)}(f_2),\right.\right.$$

$$\left.\left.\dots,l_2^{(N_2)}(f_2);\cdot\right)\right\|_{L^{2,\infty}}\underset{s,\omega_{r_1},...,\omega_{r_s},\omega_\nu}{\asymp}\min_{\substack{N_1+N_2=N,\\ N_1\ge 1,N_2\ge 1}}\left(\left(\prod_{j=1}^{s}\omega_{r_j}^*\right)^*\left(\frac{1}{N_1}\right)+((\omega_\nu^*)^s)^*\left(\frac{1}{N_2}\right)\cdot N_2^{-\frac{1}{s}}\right),$$

где оценка сверху достигается на операторах

$$\tilde{\varphi}_N^{(1)}\left(l_1\left(f\right),...,l_N\left(f\right);x,t\right)=\sum_{\substack{k=(k_1,...,k_s):\\ |k_j|\le n_j\,(j=1,...,s)}}\hat{f}\left(k\right)cos\left(2\pi\sqrt{(k,k)}t\right)e^{2\pi i(x,k)},$$

$$n_j=\left[\left(\omega_{r_j}^{*}\left(\left(\prod_{i=1}^{s}\omega_{r_i}^{*}\right)^{*}\left(\frac{1}{N}\right)\right)\right)^{-1}\right]+1,\quad (j=1,2,...,s);$$

и

$$\tilde{\varphi}_N^{(2)}\left(l_1\left(f\right),...,l_N\left(f\right);x,t\right)=\hat{f}(0)t+$$

$$+\sum_{\substack{k=(k_1,...,k_s)\in Z^s:\\ |k_j|\le n\,(j=1,...,s)}}{}^{*}\hat{f}\left(k\right)\frac{sin\left(2\pi\sqrt{(k,k)}t\right)}{2\pi\sqrt{(k,k)}}e^{2\pi i(x,k)},$$

$$n=\left[\left(\omega_{\nu}^{*}\left(\left(\left(\omega_{\nu}^{*}\right)^{s}\right)^{*}\left(\frac{1}{N}\right)\right)\right)^{-1}\right]+1.$$

II. О предельной погрешности неточной информации при оптимальном восстановлении функций

$$\delta_N(\varepsilon^{(N)}) \equiv \delta_N(D_N; T, F, \varepsilon^{(N)})_Y =$$

$$= \inf_{\left(l^{(N)}, \varphi_N\right) \in D_N} \sup_{\substack{f=(f_1,\dots,f_k)\in F \\ (z_1,\dots,z_k): \left|l_j^{(i)}(f_j) - z_j^{(i)}\right| \le \varepsilon_j^{(i)} \\ j=1,\dots,k; i=1,\dots,N_j}} \|u(\cdot; f) - \varphi_N(z_1, \dots, z_k; \cdot)\|_Y$$

Сформулируем задачу нахождения предельной погрешности неточной информации при оптимальном восстановлении.

В случае, если $\delta_N\left(D_N, T, F; 0\right)_Y \succ\prec \psi\left(N\right)$ $\left(N \to +\infty\right)$, то задача нахождения неулучшаемой последовательности $\tilde{\varepsilon}_N = \left(\tilde{\varepsilon}_N^{(1)}, ..., \tilde{\varepsilon}_N^{(N)}\right)$ $\left(N = 1, 2, ...\right)$ состоит в следующем: выполнено $\delta_N\left(D_N, T, F; \tilde{\varepsilon}_N\right)_Y \succ\prec \psi\left(N\right)$ $\left(N \to +\infty\right)$, и, одновременно, для всяких возрастающих к $+\infty$ при возрастании N при каждом j положительных последовательностей $\left\{\eta_N^{(j)}\right\}$ $\left(N = 1, 2, ...; j = 1, 2, ..., N\right)$ имеет место равенство

$$\varlimsup_{N\to\infty} \frac{\delta_N\left(D_N, T, F; \left(\eta_N^{(1)}\tilde{\varepsilon}_N^{(1)}, ..., \eta_N^{(N)}\tilde{\varepsilon}_N^{(N)}\right)\right)_Y}{\delta_N\left(D_N, T, F; 0\right)_Y} =$$

$$= \varlimsup_{N\to\infty} \frac{\delta_N\left(D_N, T, F; \left(\eta_N^{(1)}\tilde{\varepsilon}_N^{(1)}, ..., \eta_N^{(N)}\tilde{\varepsilon}_N^{(N)}\right)\right)_Y}{\psi\left(N\right)} = +\infty.$$

Таким образом, задача заключается в нахождении предельно большой величины границы ε_N неточности информации, поскольку, величина допустимой ошибки, естественно, должна быть возможно большей. Здесь же сформулировано ее свойство быть предельной, но с сохранением максимально возможной скорости убывания уклонения при восстановлении по точной информации.

Рассмотрим следующую конкретизацию сформулированной общей задачи: $F = W_p^r(0,1)$ - класс Соболева, $Y = L^q(0,1)$ ($L^\infty \equiv C[0,1]$)- пространство Лебега, где целое $r \geq 1$, $1 \leq p < q \leq +\infty$,

$D_N^{(*)} = \Big\{(l_1(f), ..., l_N(f)) : l_j(f)-$все возможные линейные функционалы на линейной оболочке $F = W_p^r(0,1)$ такие, что $\Big|l_j(1)\Big| \leq 1\Big\} \times \{\varphi_N\}$.

, ,

$\varepsilon^{(N)} = (\varepsilon_N, ..., \varepsilon_N) \in R^N$, $\left|l_j(f) - z_j\right| \le \varepsilon_N$ $(j = 1, ..., N)$, $\eta^{(N)} = (\eta_N, ..., \eta_N) \in R^N$.

Теорема 2(Г.Таугынбаева, Ш. Ажгалиев, Н. Темиргалиев). Пусть даны числа $1 \le p < q \le \infty$ и r $(r = 1, 2, 3, ...)$ и пусть $\tilde{\varepsilon}_N = N^{-\left(r - \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)\right)}$. Тогда

$$\delta_N(D_N^{(*)}, Tf = f, W_p^r\,(0,1)\,, 0)_{L^q} \succ\prec$$

$$\succ\prec \delta_N(D_N^{(*)}, Tf = f, W_p^r\,(0,1)\,, \tilde{\varepsilon}_N = N^{-\left(r - \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)\right)})_{L^q} \succ\prec N^{-\left(r - \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)\right)},$$

причем для всякой возрастающей к $+\infty$ положительной последовательности $\{\eta_N\}_{N=1}^{\infty}$ имеет место равенство

$$\overline{\lim_{N\to\infty}} \frac{\delta_N\left(\left\{D_N^{(*)}; Tf = f; W_p^r(0,1); \tilde{\varepsilon}_N \eta_N\right\}\right)_{L^q}}{\delta_N\left(\left\{D_N^{(*)}; Tf = f; W_p^r(0,1); 0\right\}\right)_{L^q}} = +\infty.$$

Замечание. Верхняя оценка реализуется на интерполяционных сплайнах Лагранжа.

Теорема 3(Г.Таугынбаева, Н.Темиргалиев). *Пусть даны числа* $s (s = 1, 2, ...)$ *и* $r > \frac{1}{2}$ *и пусть* $\tilde{\varepsilon}_N = \frac{(lnN)^{r(s-1)}}{N^r}$ $(N = 1, 2, 3, ...)$. *Тогда верны следующие соотношения*

$$\delta_N(0) \equiv \delta_N(\Phi^{(N)} \times \{\varphi_N\}; Tf = f; E_s^r; 0)_{L^2} \succ\prec$$

$$\succ\prec \delta_N(\Phi^{(N)} \times \{\varphi_N\}; Tf = f; E_s^r; \tilde{\varepsilon}_N = \frac{(lnN)^{r(s-1)}}{N^r})_{L^2} \succ\prec \frac{(lnN)^{r(s-1)}}{N^{r-\frac{1}{2}}},$$

причем для всякой возрастающей к $+\infty$ *положительной последовательности* $\{\eta_N\}_{N=1}^{\infty}$ *имеет место равенство*

$$\overline{\lim_{N\to\infty}} \frac{\delta_N\left(\left\{\Phi^{(N)} \times \{\varphi_N\}; Tf = f; E_s^r; \tilde{\varepsilon}_N \eta_N\right\}\right)_{L^2}}{\delta_N\left(\left\{\Phi^{(N)} \times \{\varphi_N\}; Tf = f; E_s^r; \tilde{\varepsilon}_N\right\}\right)_{L^2}} = +\infty.$$

Теорема 4. *Пусть даны числа* $s (s = 1, 2, ...)$ *и* $r > 0$ *и пусть* $\tilde{\varepsilon}_N = \frac{ln^{r(s-1)} N}{N^{r+\frac{1}{2}}} N = 1, 2, 3, ...$ *Тогда верны следующие соотношения*

$$\delta_N(0) \equiv \delta_N(\Phi^{(N)} \times \{\varphi_N\}\,; Tf = f; SW_2^r(0,1)^s; 0)_{L^2} \succ\prec$$

$$\succ\prec \delta_N(\Phi^{(N)} \times \{\varphi_N\}\,; Tf = f; SW_2^r(0,1)^s; \tilde{\varepsilon}_N)_{L^2} \succ\prec \frac{ln^{r(s-1)} N}{N^r},$$

причем для всякой возрастающей к $+\infty$ *положительной последовательности* $\{\eta_N\}_{N=1}^{\infty}$ *имеет место равенство*

$$\overline{\lim_{N\to\infty}} \frac{\delta_N\left(\left\{\Phi^{(N)} \times \{\varphi_N\}\,; Tf = f; SW_2^r(0,1)^s; \tilde{\varepsilon}_N \eta_N\right\}\right)_{L^2}}{\delta_N\left(\left\{\Phi^{(N)} \times \{\varphi_N\}\,; Tf = f; SW_2^r(0,1)^s; \tilde{\varepsilon}_N\right\}\right)_{L^2}} = +\infty.$$

Вывод: Если в теореме 2 предельная погрешность $\tilde{\varepsilon}_N$ восстановления по неточной информации имеем порядок неулучшаемой погрешности $\delta_N(0)$ при восстановлений по точной информации, то в условиях теорем 3 и 4 ситуация совершенно иная.

Именно, при восстановлении в гильбертовой метрике функций из классов Коробова $E_s^r(r > \frac{1}{2})$ по информации, полученной от тригонометрических коэффициентов Фурье и переработанной по произвольному алгоритму величина предельной погрешности есть $\tilde{\varepsilon}_N \succ\prec \frac{(lnN)^{r(s-1)}}{N^r}$, в то время как $\delta_N(0) \succ\prec \frac{(lnN)^{r(s-1)}}{N^{r-\frac{1}{2}}}$, т.е. $\tilde{\varepsilon}_N$ имеет порядок на $\frac{1}{\sqrt{N}}$ меньше $\delta_N(0)$.

То же самое, в классах SW_2^r: $\delta_N(0) \succ\prec \frac{(lnN)^{r(s-1)}}{N^r}$ и $\tilde{\varepsilon}_N \succ\prec \frac{(lnN)^{r(s-1)}}{N^{r+\frac{1}{2}}}$ соответственно.

III. К вопросу об определении “внутренних свойств” сетки для эффективного восстановления

Пусть функция f описывает *некоторый процесс*, происходящий в области Ω. Пусть в точках $\xi_1, ..., \xi_N$ из Ω установлены измерительные приборы. Зададимся вопросом, можно ли по *внутренним свойствам этой конечной последовательности* (сетки) $\xi_1, ..., \xi_N$ установить, насколько по значениям $f(\xi_1), ..., f(\xi_N)$ можно описать глобальные свойства функции f. Например, таким *“внутренним свойством”* числовой последовательности, обеспечивающем ее глобальное свойство – сходимость, является условие Коши.

Однако такая общая постановка задачи слишком расплывчата и нуждается в дальнейших уточнениях.

Ради определенности и простоты здесь рассмотрим случай численного интегрирования.

Непрерывную на C^N функцию $\varphi_N(z_1, ..., z_N)$ с условием $\varphi_N(0, ..., 0) = 0$назовем *алгоритмом переработки информации* $z_1 = f(\xi_1), ..., z_N = f(\xi_N)$. Результатом применения к *числовой информации* $f(\xi_1), ..., f(\xi_N)$ алгоритма φ_N является *вычислительный агрегат* $\varphi_N(f(\xi_1), ..., f(\xi_N))$ для приближенного вычисления интеграла $\int\limits_{\Omega} f(x)\, dx$.

Далее, ясно, что от функции f априори требуется определенная гладкость, чтобы каждое значение $f(\xi_i)$, в том или ином смысле, представляло поведение функции f в определенной окрестности ξ_i.

При этом предположение бесконечной гладкости функции f само по себе не обеспечивает даже какой-либо близости $\varphi_N\left(f\left(\xi_1\right),...,f\left(\xi_N\right)\right)$ к $\int\limits_{\Omega} f\left(x\right)dx$. Так, в случае $\Omega = [0,1]$, $0 \leq \xi_1 < ... < \xi_N \leq 1$ для всякого $\varepsilon > 0$ существует бесконечно дифференцируемая на $R = (-\infty, +\infty)$ неотрицательная функция f_ε такая, что $f_\varepsilon\left(\xi_1\right) = ... = f_\varepsilon\left(\xi_N\right) = 0$, и $\int\limits_0^1 f_\varepsilon\left(x\right)dx > \varepsilon$, стало быть,

$$\left|\int\limits_0^1 f_\varepsilon\left(x\right)dx - \varphi_N\left(f_\varepsilon\left(\xi_1\right),...,f_\varepsilon\left(\xi_N\right)\right)\right| > \varepsilon.$$

В качестве Ω возьмем s-мерный единичный куб $[0,1]^s$, а гладкость функции $f(x_1,...,x_s)$ определим в виде принадлежности классу Коробова E_s^r $(s=1,2,...;\ r>1)$, что означает выполнение неравенств $\left(\bar{m}_j=\max\left\{1,\left|m_j\right|\right\}\right)$

$$\left|\hat{f}(m_1...,m_s)\right|\leq(\bar{m}_1\ldots\bar{m}_s)^{-r}$$

для всех $m=(m_1,...,m_s)\in Z^s$, где

$$\hat{f}(m)=\int\limits_{[0,1]^s}f(x)\,e^{-2\pi i(m,x)}dx,\ (m,x)=m_1x_1+...+m_sx_s.$$

Определим величину (χ_B - характеристическая функция множества B)

$$D_s(\xi_1, ..., \xi_N) = \sup \left\{ \left| \frac{A_J}{N} - \frac{|J|}{1} \right| = \left| \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \chi_J(\xi_k) - \int\limits_{[0.1]^s} \chi_J(x)\, dx \right| : \right.$$

$$\left. J = [a_1, b_1] \times ... \times [a_s, b_s] \subset [0, 1]^s \right\}$$

Для трех видов сеток справедливы следующие результаты.

1^o. Равномерная сетка $(n = 1, 2, ...; N = n^s)$

$$\tau^{(N)} = \{\tau_k\}_{k=1}^{N} \equiv \left\{ \left(\frac{k_1}{n}, ..., \frac{k_s}{n} \right) : k_j = 0, 1, ..., n \quad (j = 1, ..., s) \right\} \ (N = n^s) \, . \tag{5}$$

Порядок дискрепанса:

$$D_s(\tau_N) \underset{s}{\succ\prec} N^{-\frac{1}{s}}.$$

Порядок приближения:

Теорема 5. *Для равномерной сетки* (5) *справедлива двусторонняя оценка*

$$\inf_{c_1+...+c_N=1} \sup_{f \in E_s^r} \left| \int\limits_{[0,1]^s} f(x)\,dx - \sum_{k=1}^{N} c_k f(\tau_k) \right| \underset{r,s}{\succ\prec} N^{-\frac{r}{s}} \tag{6}$$

$(n = 1,\ 2,\ ...;\ N(n, s) = n^s)$.

2^o. Сетка Смоляка

$$t^{(N)} = \{t_k\}_{k=1}^{N} \equiv \left\{ \left(\frac{2\mu_1 - 1}{2^{\nu_1}}, \frac{2\mu_2 - 1}{2^{\nu_2}}, ..., \frac{2\mu_{s-1} - 1}{2^{\nu_{s-1}}}, \frac{\mu_s}{2^{\nu_s}} \right) : \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} 1 \le \mu_j \le \max\left\{1; 2^{\nu_j - 1}\right\}, \nu_j \ge 0,\ j = 1, 2, ..., s-1, \\ 1 \le \mu_s \le 2^{\nu_s},\ \sum\limits_{j=1}^{s} \nu_j = q \end{array} \right\} \quad (7).$$

Порядок дискрепанса:

Теорема 6(Н.Наурызбаев, Н.Темиргалиев). *Для сетки Смоляка $t^{(N)}$ имеет место двусторонняя оценка*

$$D_s\left(t^{(N)}\right) \underset{s}{\succ\prec} (\ln N)^{-1} \quad \left(q \ge s,\ N = N_s(q) \succ\prec 2^q q^{s-1}\right) . \quad (8)$$

Порядок приближения (А.Шоманова, С.Кудайбергенов, Н.Темиргалиев)

$$\delta_N\left(E_s^r\right) \equiv$$

$$\sup_{f\in E_s^r}\left| \int\limits_{[0,1]^s} f(x)dx \; - \sum_{l=0}^{s-1} (-1)^l \begin{pmatrix} s-1 \\ l \end{pmatrix} \sum_{\substack{(\nu_1,...,\nu_s)\in Z^s: \\ \nu_j\geq 0\ (j=1,...,s), \\ \nu_1+...+\nu_s=q-l}} \frac{1}{2^{q-l}} \sum_{k_1=0}^{2^{\nu_1-1}} \cdots \sum_{k_s=0}^{2^{\nu_s-1}} f\left(\frac{k_1}{2^{\nu_1}},...\frac{k_s}{2^{\nu_s}}\right) \right|$$

$$\underset{s,r}{\succ\prec} \frac{(\ln N)^{(r+1)(s-1)}}{N^r} \left(N \underset{s}{\succ\prec} 2^q q^{s-1}\right). \tag{9}$$

В связи соотношениями (8) заметим, что согласно определению (1) дискрепанс $D_s\left(t^{(N)}\right)$ не может иметь хорошие свойства, поскольку к интегралу $\int\limits_{[0,1]^s} \chi_J\left(x\right)dx$ применяется не квадратурная формула Смоляка из (9), оптимальная в степенной шкале, а иная – с той же сеткой (7), но с другими, а именно, равными весами. В теореме 6 по существу выясняется величина потери от замены весов.

3°. Сетка Коробова

$$\eta^{(N)} = \{\eta_k\}_{k=1}^{N} \equiv \left\{ \left(\left\{ \frac{k}{N} a_1 \right\}, ..., \left\{ \frac{k}{N} a_s \right\} \right) : k = 1, ..., N \right\}. \qquad (10)$$

a) Порядок дискрепанса(Е.Баилов, А.Жубанышева, Н.Темиргалиев)

$$D_s \left(\eta^{(N)} \right) \underset{s}{<<} \frac{(\ln N)^{2s}}{N}$$

b) Порядок приближения

$$\sup_{f \in E_s^r} \left| \int\limits_{[0,1]^s} f(x)\, dx - \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} f(\eta_k) \right| \underset{s,r}{<<} \frac{(\ln N)^{3sr}}{N^r}. \qquad (11)$$

Как показывает неравенство И.Ф. Шарыгина

$$\inf_{\substack{c_1 + ... + c_N = 1 \\ y, ..., y_N \in [0,1]^s}} \sup_{f \in E_s^r} \left| \int\limits_{[0,1]^s} f(x)\, dx - \sum_{k=1}^{N} c_k f(y_k) \right| \underset{s}{>>} \frac{(\ln N)^{s-1}}{N^r},$$

соотношения (9) и (11) неулучшаемы в степенной шкале, а (6) в s-раз хуже возможного.

Очевидный ответ на этот вопрос для данной системы узлов $\xi_1, ..., \xi_N$ в виде существования весов $c_1, ..., c_N$ таких, что $(\beta > 0, r > 1)$

$$\sum_{m\in Z^s\setminus\{0\}} \frac{\left|\sum_{k=1}^{N} c_k e^{2\pi i(m,\xi_k)}\right|}{(\bar{m}_1...\bar{m}_s)^r} \underset{s,r}{<<} \frac{(\ln N)^\beta}{N^r} \tag{12}$$

относится к т.н. ‘‘глухим’’ и, по существу, эквивалентна самой постановке задачи.

На самом деле, пусть дана сетка $\{\xi_k\}_{k=1}^N \subset [0,1]^s$. Тогда, для выполнения соотношения (12)

$$\sup_{f\in E_s^r} \left| \int\limits_{[0,1]^s} f(x)\,dx - \sum_{k=1}^{N_t} c_k f(\xi_k) \right| \underset{s,r}{<<} \frac{(\ln N)^\beta}{N^r} \tag{13}$$

необходимо и достаточно выполнение (12)

Частичный, уже не тривиальный, ответ на обсуждаемый вопрос дан в следующей теореме, где представлено необходимое условие на любую сетку с рациональными узлами не противоречащее сеткам Коробова и Смоляка, но отсекающее равномерную сетку.

Теорема 7(Н.Наурызбаев, Н.Темиргалиев). *Пусть даны числа* $r > 1$, s $(s = 1, 2, \ldots)$, N $(N = 2, 3, \ldots)$ *дана сетка из* N

$$\xi_k = \left(\frac{v_1^{(k)}}{u_1^{(k)}}, \ldots, \frac{v_s^{(k)}}{u_s^{(k)}}\right) \in [0,1]^s \cap Q^s \quad (k = 1, \ldots, N)$$

с рациональными координатами (при этом считается, что целые числа $\nu_j^{(k)} u_j^{(k)}$*-взаимно просты)* $d_N = \min\limits_{j=1,\ldots,s} \left\{d_j^{(N)}\right\}, d_j^{(N)} = \left\{u_j^{(1)}, \ldots, u_j^{(N)}\right\}$ $(j = 1, \ldots, s)$. *Тогда для произвольных чисел* $c_1, \ldots, c_N$, *удовлетворяющих условию* $c_1 + \ldots + c_N = 1$, *существует функция f из класса* E_s^r *такая, что имеет место соотношение*

$$\left| \int\limits_{[0,1]^s} f(x)dx - \sum_{k=1}^{N} c_k f(\xi_k) \right| \underset{r,s}{>>} d_N^{-r},$$

константа в которой зависит лишь от r и s.

Действительно, из этой теоремы вытекают следующие оценки снизу:

1) Для равномерной сетки $\{\tau_k\}_{k=1}^{N}$ величина $d_N = d_j^{(N)} = n$, откуда, в силу теоремы 7, имеет место соотношение

$$\inf_{c_1+\ldots+c_N=1} \sup_{f\in E_s^r} \left| \int\limits_{\{0,1\}^s} f(x)\,dx - \sum_{k=1}^{N} c_k f(\tau_k) \right| \underset{r,s}{>>} d_N^{-r} = n^{-r} = N^{-r/s}.$$

2) Для сетки Смоляка $\{t_k\}_{k=1}^{N}$ величина d_N равна 2^q

, стало быть, из $N \underset{s}{\succ\prec} 2^q q^{s-1}$ следует $d_N = 2^q \underset{s}{\succ\prec} \frac{N}{\ln^{s-1} N}$, откуда, опять же в силу теоремы 7, имеем

$$\delta_N(E_s^r) >> d_N^{-r} \underset{s}{\succ\prec} \frac{(\ln N)^{(s-1)r}}{N^r}. \tag{14}$$

Таким образом, из общей теоремы 7 следует точная в степенной шкале оценка снизу (14), в то время как точный порядок есть $\delta_N \underset{s}{\succ\prec} \frac{(\ln N)^{(s-1)(r+1)}}{N^r}$.

3) Для любой сетки Коробова $d_N = N$ и имеет место неулучшаемая в степенной шкале оценка снизу погрешности $\delta_N\left(E_s^r\right)$,

$$\delta_N\left(E_s^r\right) \equiv$$

$$\inf_{\substack{a_j \in Z\ (j=1,...,s),\\ c_1+...+c_N=1}} \sup_{f\in E_s^r} \left| \int\limits_{[0,1]^s} f(x)dx - \sum_{k=1}^{N} c_k^f \left(\left\{ \frac{a_1}{N} k \right\}, ..., \left\{ \frac{a_s}{N} k \right\} \right) \right| \underset{r,s}{>>} d_N^{-r} N^{-r}$$

И в этом случае искомое соотношение следует из теоремы 7.

Таким образом, теорема 7 означает, что для того, чтобы по заданной сетке из N узлов посредством подбора весов иметь возможность построить квадратурную формулу для класса E_s^r, точную в степенной шкале, необходимо выполнение условия $d_N >> N\left(\ln N\right)^{-\beta}$. Причем этому условию удовлетворяют сетки Коробова и Смоляка, но не удовлетворяют равномерные сетки.

Сделаем выводы общего характера из разобранного частного случая.

Изучается следующая задача. Пусть дан класс F определенных и непрерывных на $[0,\ 1]^s$ функций и сетка $\xi_1, ..., \xi_N$ из $[0,\ 1]^s$. Вычисляется (или оценивается) величина

$$\delta_N(\xi_1,\ ...,\ \xi_N; F) = \inf_{c_1^+ ... + c_N^= 1} \sup_{f\in F} \left| \int\limits_{[0,1]^s} f(x)dx - \sum_{k=1}^{N} c_k^f(\xi_k) \right|. \qquad (15)$$

Это известная задача Сарда.

Далее, величина (15) сравнивается с величиной

$$\delta_N(F) = \inf_{\xi_1,\,\ldots,\,\xi_N} \delta_N(\xi_1,\,\ldots,\,\xi_N;F)$$

и задача определения качества сетки заключается в нахождении свойств сеток $\xi_1,...,\xi_N$, обеспечивающих близость, в том или ином смысле, последовательности $\{\delta_N(\xi_1,...,\xi_N;F)\}$ к последовательности $\{\delta_N(F)\}$.

Заметим также, что задача (15) вписывается в общую задачу восстановления

$$\inf_{(l_1(f),\ldots,l_N(f);\varphi_N)\in D_N} \sup_{f\in F} \|Tf(\cdot) - \varphi_N(l_1(f),...,l_N(f);\cdot)\| \tag{16}$$

в случае

$$Tf = \int\limits_{[0,1]^s} f(x)\,dx,$$

$$D_N = \{(l_1(f),...,l_N(f);\varphi_N) \equiv \varphi_N(l_1(f),...,l_N(f)) : l_j(f) = f(\xi_j)\ \ (j = 1,...,N),$$

$$\sum\nolimits_{k=1}^{N} c_k = 1,\ \varphi_N(z_1,...,z_N) = \sum\nolimits_{k=1}^{N} c_k z_k.$$

Полагая $Tf = f$ в (16) также получаем задачу о качестве сеток при восстановлении функции по информации, полученной от заданной сетки $\{\xi_1,\ldots,\xi_N\}$ посредством системы функционалов $\{f(\xi_1),\ldots,f(\xi_N)\}$